LEGGE DI COULOMB

Due particelle puntiformi distanti di carica q_1 e q_2 a distanza r tra loro risentono di una FORZA ELETTRICA data da

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

dove $\hat{u}_r$ è il versore della congiungente le due cariche, ed ε_0 è la COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$). Chiaramente, se $\vec{F}$ è la forza percepita dalla carica 1, $-\vec{F}$ è la forza percepita dalla carica 2. Dall'espressione di $\vec{F}$ si evince inoltre che l'interazione è ATTRATTIVA se le due cariche sono opposte ($q_1 q_2 < 0$), e REPULSIVA se sono di pari segno ($q_1 q_2 > 0$)

ESEMPI

① Nel modello classico dell'atomo di idrogeno, protone ed elettrone si trovano a circa $5 \cdot 10^{-11}$ m di distanza. Confrontare la forza gravitazionale e la forza elettrica tra le due particelle

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$|\vec{F}_{el}| = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C \qquad a = 5 \cdot 10^{-11}\ m$$

$$|\vec{F}_g| = G\frac{m_e m_p}{a^2} \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2 \qquad m_e = 9 \cdot 10^{-31}\ Kg \qquad m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Kg$$

$F_{el} \simeq 8{,}2 \cdot 10^{-8}\ N$, $F_g \simeq 3{,}6 \cdot 10^{-47}\ N$, quindi

$F_{el}/F_g \simeq 2{,}3 \cdot 10^{39}$

La forza elettrica è 39 ordini di grandezza SUPERIORE alla forza gravitazionale, e può essere quindi considerata la vera responsabile della formazione dell'atomo

CAMPO ELETTRICO

Si definisce CAMPO ELETTROSTATICO generato dalla carica q il rapporto tra la forza elettrostatica che q esercita su una carica q_0 a distanza r, ed il valore stesso della carica q_0 (detta CARICA DI PROVA). Il campo elettrico si indica con $\vec{E}$

$$\vec{F}_{el} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \vec{E} = \frac{1}{q_0}\vec{F}_{el} = \frac{1}{q_0}\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell..388 9837745

Il campo elettrico è dotato di una importante proprietà detta PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: se più cariche sono presenti nel sistema considerato, il campo elettrico totale percepito in un punto (distante r_i dalla i-esima carica q_i) è la SOMMA dei singoli campi elettrici in quel punto. Per n cariche puntiformi:

$$\vec{E}_{TOT} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{u}_{r_i}$$

Questo vale anche quando la carica si trova distribuita in modo CONTINUO in una regione dello spazio. In questi casi si parla di densità di carica, ovvero di carica per unità di lunghezza ($\lambda = \frac{q}{l}$ C/m) superficie ($\sigma = \frac{q}{A}$ C/m^2), o volume ($\rho = \frac{q}{V}$ C/m^3). Per trovare il campo elettrico si dovrà allora passare al calcolo integrale

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \lambda_{(x,y,z)}\,dl \qquad \text{per una distribuzione lineare}$$

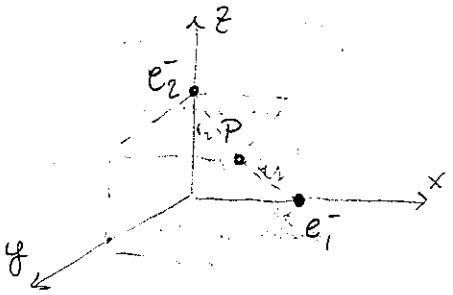
$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \sigma_{(x,y,z)}\,d\Sigma \qquad \text{per una distribuzione superficiale}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho_{(x,y,z)}\,dV \qquad \text{per una distribuzione volumica}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESEMPI

① Calcolare il campo elettrico percepito nel punto $(1;1;1)$ se sono presenti due elettroni, nelle posizioni $(1;0;0)$ e $(0;0;1)$



Il punto P in figura è quello in cui si vuole calcolare il campo elettrico

Il campo del primo elettrone è:

$$\vec{E}_1 = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-1}{r_1^3}\vec{i} + \frac{y}{r_1^3}\vec{j} + \frac{z}{r_1^3}\vec{k}\right)$$

dove $r_1 = \left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}$ $\quad \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}$

Il campo del secondo elettrone è

$$\vec{E}_2 = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{r_2^3}\vec{i} + \frac{y}{r_2^3}\vec{j} + \frac{z-1}{r_2^3}\vec{k}\right)$$

dove $r_2 = \left[x^2 + y^2 + (z-1)^2\right]^{1/2}$

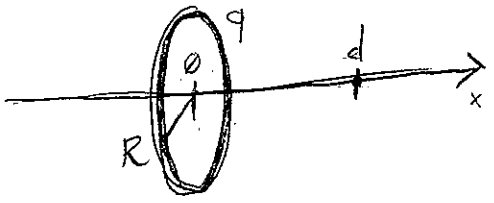
Il campo totale è allora

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x-1}{r_1^3} + \frac{x}{r_2^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}\right)\vec{j} + \left(\frac{z}{r_1^3} + \frac{z-1}{r_2^3}\right)\vec{k}\right]$$

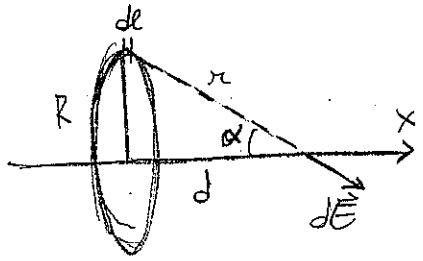
Nel punto P, $x = y = z = 1$ e $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$. Allora

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right] \qquad |\vec{E}_{(P)}| = \frac{\sqrt{3}\,e}{4\pi\varepsilon_0}$$

② E' dato un anello circolare su cui è distribuita uniformemente la carica q. L'anello ha raggio R. Calcolare il campo elettrico percepito a distanza d dall'anello, SULL'ASSE dell'anello.



Si può immaginare che l'anello sia dotato di una densità di carica lineare $\lambda = q/2\pi R$. Consideriamo il segmento dl di anello; esso avrà una carica $dq = \lambda dl$ e a distanza r esercita totale il campo elettrico $d\vec{E}$ mostrato in figura. $d\vec{E}$ può essere scomposto in una parte parallela all'asse, e una ortogonale. Possiamo però osservare che la somma delle parti



ortogonali è NULLA, in quanto ogni segmento dl ne ha uno dalla parte opposta dell'anello, il cui campo ortogonale è uguale e opposto. Il campo totale è allora dato dalla somma delle componenti di $d\vec{E}$ parallele all'asse dell'anello

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}\cos\alpha = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\ \hat{u}_x$$

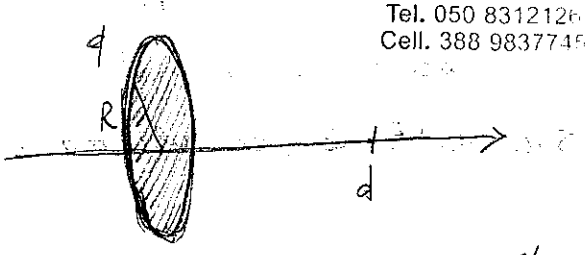
Si ha inoltre $d = r\cos\alpha$ e $r = \sqrt{d^2+R^2}$, e allora

$$dE = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(d^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+R^2)^{3/2}}\int_l dl$$

$$\int_l dl = 2\pi R \Rightarrow E = \frac{\lambda d\, 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+R^2)^{3/2}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+R^2)^{3/2}}$$

(3) Calcolare il campo percepito sull'asse di una superficie a forma di disco su cui è distribuita una carica q. Il disco ha raggio R

MASTER CUS
Tel. 050 831212
Cell. 388 9837745



Possiamo immaginare che sul disco sia presente una densità superficiale di carica $\sigma = q/\pi R^2$

Consideriamo di prendere ~~il disco~~ l'anello di spessore dr sul disco (ovvero la corona circolare tra r e $r+dr$, $r \in [0; R]$).

L'area di questa corona è data da

$$A = \pi r^2 \longrightarrow dA = 2\pi r\, dr$$

e allora l'anello può essere considerato come dotato di una densità lineare di carica $d\lambda = dq/2\pi r = \sigma dA/2\pi r = \sigma\, dr$. Abbiamo già ricavato il campo per un anello sul suo asse, quindi ora otterremo quello del disco integrando tutti gli anelli (da $r=0$ a $r=R$).

$$dE = \frac{d\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi r d}{(d^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma\, dx}{2\varepsilon_0}\frac{r\, dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_0^R dE_{(r)} = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\, dr \quad \text{pongo} \quad t = r^2+d^2,\ dt = 2r\, dr,\ t \to [d^2, R^2+d^2]$$

$$E = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}\int_{d^2}^{d^2+R^2} t^{-3/2}\, dt = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}\Big| -2t^{-1/2}\Big|_{d^2}^{d^2+R^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right]$$

MASTER COPY
Tel. 050.8312126
Cell. 388 9837745

Un caso interessante che risulterà utile più avanti è quello che si ottiene quando $d \ll R$, ovvero quando il punto è così vicino al disco da poter considerare che questo abbia raggio infinito. In tal caso:

$$E' = \lim_{R\to\infty} E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Questo è il campo esercitato da un PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO. Notare che è costante in ogni punto dello spazio.